Universität
Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik II

Herbstsemester 2019

Vorlesung 6

Prof. Dr. Katia Saporiti

Übersicht

I. Identität

II. Erweiterung der prädikatenlogischen Sprache PL um das Identitätszeichen

III. Erweiterung des prädikatenlogischen Beth-Kalküls

Identität

Identität als zweistelliges Prädikat

- Identität kann als ein zweistelliges Prädikat aufgefasst werden.
  - Pxy: x ist identisch mit y. (x ist ein und dasselbe wie y).
- Auf diese Weise können jedoch einige Folgerungsbeziehungen nicht erfasst werden.
- Beispielsweise kann die Gültigkeit des folgenden Schlusses nicht nachgewiesen werden:

  (1) „Wenn Hänsel mit Hans und Hans mit Johannes identisch ist, dann ist Hänsel mit Johannes identisch."
- Der Versuch, die Gültigkeit von (1) im Beth-Kalkül zu beweisen, scheitert.
- Um die Gültigkeit von (1) nachzuweisen, bräuchte man die „zusätzliche" Information, dass Pxy eine transitive Relation ist.
- Diese Information wäre Teil einer Identitätstheorie.
- Ob eine solche Theorie Teil der Logik ist, ist umstritten.

Pxy: x ist mit y identisch.

a: Hänsel / b: Hans / c: Johannes

$$\neg(\boldsymbol{Pab} \wedge \boldsymbol{Pbc} \rightarrow \boldsymbol{Pac})$$

$$\boldsymbol{Pab} \wedge \boldsymbol{Pbc}$$

$$\neg\boldsymbol{Pac}$$

$$\boldsymbol{Pab}$$

$$\boldsymbol{Pbc}$$

vollständiger, offener Baum

Identität als Äquivalenzrelation

– Binäre Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, bezeichnet man als ***Äquivalenzrelationen***.

– Identität ist eine Äquivalenzrelation, denn sie ist

  – reflexiv: $\forall x(x = x)$

  – symmetrisch: $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

  – transitiv: $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

Achtung! Dies sind keine PL-Ausdrücke!

– Als solche unterscheidet sie sich jedoch noch nicht von anderen Äquivalenzrelationen wie z. B. der Relation gleich gross zu sein.

– Was zeichnet die Identitätsbeziehung gegenüber anderen Äquivalenzrelationen aus?

– Identische Dinge teilen nicht nur bestimmte, sondern alle ihre Eigenschaften.

– Wenn y mit x identisch ist, dann hat y *jede* Eigenschaft, die x hat.

$$\forall x \forall y(x = y \rightarrow \forall \Phi(\Phi x \rightarrow \Phi y))$$

Auch das ist kein PL-Ausdruck!

– Aber das wäre eine Quantifizierung über Eigenschaften, die sich in einer prädikatenlogischen Sprache 1. Stufe nicht formulieren lässt.

– Man kann diese Aussage einem prädikatenlogischen System 1. Stufe nicht als Axiom hinzufügen.

Identität und Ununterscheidbarkeit

– Die ***Identität des Ununterscheidbaren***: Wenn jedes Prädikat, das auf x zutrifft, auch auf y zutrifft und jedes Prädikat, das auf y zutrifft, auch auf x zutrifft, dann ist x mit y identisch. (Wenn x in jeder Hinsicht genau wie y ist, dann handelt es sich bei x und y um ein und dasselbe Ding.)

$$\forall\Phi(\Phi x \leftrightarrow \Phi y) \Rightarrow x=y$$

Kein PL-Ausdruck!

– Die ***Ununterscheidbarkeit des Identischen***: Wenn x mit y identisch ist, dann trifft jedes Prädikat, das auf x zutrifft, auch auf y zu, und trifft jedes Prädikat, das auf y zutrifft, auch auf x zu. (Wenn x mit y identisch ist, dann ist x in jeder Hinsicht genau wie y.)

Kein PL-Ausdruck!

$$x=y \Rightarrow \forall\Phi(\Phi x \leftrightarrow \Phi y)$$

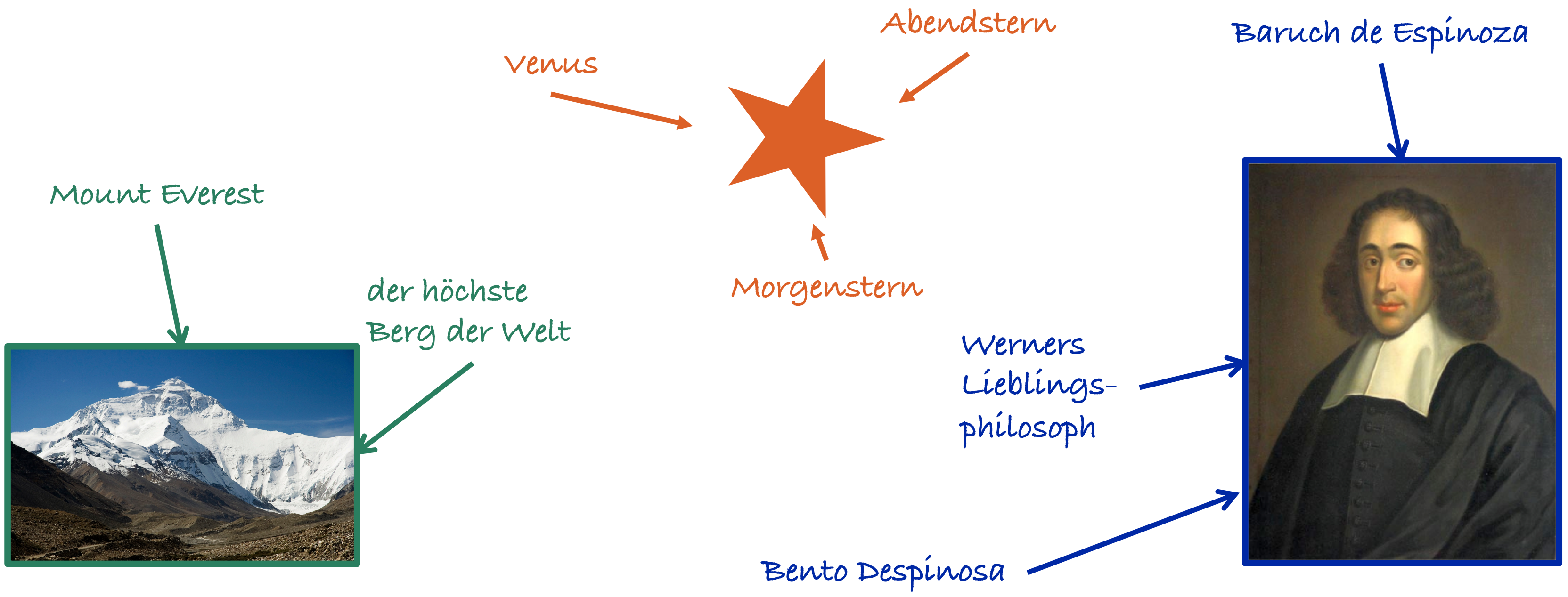
– Das ***Identitätsprinzip***: x ist genau dann mit y identisch, wenn sich x nicht von y unterscheidet; x ist genau dann mit y identisch, wenn auf x dieselben Prädikate zutreffen wie auf y. x ist mit y genau dann identisch, wenn x in jeder Hinsicht genau wie y ist.

Kein PL-Ausdruck!

$$\forall x \forall y(x=y \leftrightarrow \forall\Phi(\Phi x \leftrightarrow \Phi y))$$

Identität als Gleichheit mit sich selbst

– Jedes Ding ist mit sich (und nur mit sich) selbst identisch.
– *Wenn x und y miteinander identisch sind, dann sind x und y ein und dasselbe Ding.
– Mit Hilfe des Begriffs der Identität, können wir deutlich machen, dass wir uns auf verschiedene Weise auf ein und dasselbe Ding beziehen.



Identitätsaussagen und Prädikationen

- Wenn a mit b identisch ist, dann bezeichnen wir mit „a“ und „b“ ein und dasselbe Einzelding (Individuum).
  - Descartes ist (ist identisch mit) Cartesius.
    - (Descartes = Cartesius)
  - Der Morgenstern ist der Abendstern.
    - (Der Morgenstern = der Abendstern)
  - Der Mount Everest ist der höchste Berg der Welt.
    - (Mount Everest = der höchste Berg der Welt)
  - Der Frosch ist der verzauberte Prinz.
    - (Der Frosch = der verzauberte Prinz)
- Das „ist“, mit dem wir das Bestehen einer Identität ausdrücken, muss vom „ist“, mit dem wir Prädikate zuschreiben, unterschieden werden.
- Mit folgenden Sätzen stellen wir *keine* Identitäts-behauptungen auf, sondern prädizieren etwas.
  - Descartes ist ein Philosoph.
  - Der Morgenstern ist hell.
  - Der Frosch ist ein verzauberter Prinz.
- Zwei Hinweise auf das Vorliegen einer Identitätsaussage:
  - Austauschbarkeit der Bezeichnungen für die miteinander identifizierten Gegenstände
  - Ersetzbarkeit von „ist“ durch „ist kein anderes (kein anderer, keine andere) als“

Erweiterung der prädikatenlogischen Sprache PL um ein Zeichen für die Identität .... und Formalisierungsbeispiele

Erweiterung der Sprache PL um „=“ zur Sprache PL_I

- Wir schreiben: x = y (statt Pxy) für „x ist mit y identisch”.
- Die mit „=“ ausgedrückte Beziehung nennen wir „Identität“.
- Sie besteht nur zwischen Einzeldingen (Individuen).
- Aus „x = y“ wird ein Satz, wenn Designatoren an die Stelle der Variablen treten.
- Identitätsaussagen können im Deutschen sehr verschieden aussehen:

  Der Mount Everest ist der höchste Berg der Welt.

  Cassius Clay und Muhammad Ali sind dieselbe Person.

  Der da ist kein anderer als George Clooney.

  Zwei plus drei ist fünf.

- Das Identitätszeichen drückt die Identität derjenigen Dinge aus, für die die Zeichen stehen, die es flankieren.
- Es kann nur zwischen Individuentermen von PL bzw. PL_I stehen (z.B.: a=b, x=y, a=y oder b=x),
- nicht aber zwischen Formeln (Sätzen).
- Die Negation der Identität wird mit Hilfe des Negationszeichens „¬“ ausgedrückt
  - „¬(a = b)“ (alternative Notation „a≠b“)
- Das Identitätszeichen bindet stärker als jedes andere Zeichen von PL_I.
  - Statt „∀x (Px → (x = a))“ können wir deshalb schreiben „∀x (Px → x = a)“.
  - Statt „¬(a=b)“ können wir schreiben „¬a=b“.
- Wichtig: „¬a“ ist weder eine (Teil-)Formel, noch ein Individuenterm von PL_I !

Formalisierungsbeispiele

(1) Wenn Mark Twain ein Schriftsteller ist und Samuel Clemens kein Schriftsteller ist, dann ist Mark Twain nicht Samuel Clemens.

$$Pa \wedge \neg Pb \rightarrow \neg(a = b)$$

(2) Samuel Clemens ist der einzige Schriftsteller.

$$Pa \wedge \forall x(Px \rightarrow x = a)$$

- (Lies: Samuel Clemens ist ein Schriftsteller und für alle Dinge gilt: wenn etwas ein Schriftsteller ist, dann ist es Samuel Clemens.)

(3) Es gibt (genau) *eine* Ursache für alles (etwas, das die Ursache von allem ist).

$$\exists x \forall y(Pxy \wedge \forall z(Pzy \rightarrow z = x))$$

- (Lies: Es gibt etwas (x), das ist für alle Dinge (y) die Ursache, so dass (und) für alle Dinge (z) gilt, wenn eines von ihnen die Ursache eines Dings (y) ist, dann ist es mit x identisch.)

Komparative und Superlative

(1) Thalia ist klüger als Klio. Pab

(2) Anna ist klüger als alle Musen. $\forall x(Qx \rightarrow Pcx)$

(3) Thalia ist die klügste Muse. ?

a: Thalia
b: Klio
c: Anna
Pxy: x ist klüger als y.
Qx: x ist eine Muse.

– Thalia kann nicht klüger als alle Musen sein, wenn sie selbst eine Muse ist. Denn sie kann nicht klüger als sie selbst sein. „Klüger sein als" ist eine irreflexive Relation.

– Wenn Thalia die klügste Muse ist, dann bedeutet dies, dass Thalia klüger ist als jede andere Muse (jede andere als Thalia).

– Logische Struktur von (3):

$$Qa \wedge \forall x(Qx \wedge \neg(x = a) \rightarrow Pax)$$

– Lies: „Thalia ist eine Muse und für alle Dinge x gilt: Wenn x eine Muse und nicht mit Thalia identisch ist, dann ist Thalia klüger als x."

Exklusionen

a: Kalliope
b: Klio
Px: x ist eine Muse.
Qxy: x ist klüger als y.

(4) Kalliope ist die klügste Muse, abgesehen von Klio.

– Kalliope ist das klügste Mitglied der Gruppe aller Musen ohne Klio.
– Die Aussage impliziert nicht, dass Kalliope klüger ist als Klio, sondern lässt die Möglichkeit offen, dass beide gleich klug sind (oder dass Klio klüger ist als Kalliope).
– Sie impliziert jedoch, dass beide, Kalliope und Klio, Musen sind: $Pa \wedge Pb$
– Die Aussage impliziert nicht, dass Kalliope nicht mit Klio identisch ist (auch wenn sie es vielleicht nahe zu legen scheint).
– Tatsächlich beziehen wir uns mit (4) auf die Klasse aller Musen ohne Klio und Kalliope und behaupten, dass Kalliope klüger ist als jedes Mitglied dieser Klasse.

$$\forall x(Px \wedge (\neg(x = a) \wedge \neg(x = b)) \rightarrow Qax)$$

– Eine Formalisierung von (4) könnte also wie folgt aussehen:

$$(Pa \wedge Pb) \wedge \forall x(Px \wedge (\neg(x = a) \wedge \neg(x = b)) \rightarrow Qax)$$

– (Lies: „Kalliope ist eine Muse und Klio ist eine Muse und für alle Dinge x gilt: Wenn x eine Muse und weder mit Kalliope noch Klio identisch ist, dann ist Kalliope klüger als x.“)

Einzigkeitsbehauptungen

(5) Nur Thalia ist weise.

- Die Klasse aller weisen Dinge hat nur ein Element: Thalia.
- a: Thalia / Px: x ist weise

$$Pa \land \forall x(Px \rightarrow x = a)$$

- Lies: „Thalia ist weise und für alle Dinge gilt: wenn etwas weise ist, dann ist es mit Thalia identisch."

(6) Thalia ist die einzige weise Muse.

- a: Thalia / Px: x ist weise. / Qx: x ist eine Muse.

$$(Pa \land Qa) \land \forall x(Px \land Qx \rightarrow x = a)$$

- Lies: „Thalia ist eine Muse, und Thalia ist weise, und für alle Dinge gilt: Wenn etwas eine Muse und weise ist, dann ist es mit Thalia identisch."
- Satz (6) ist genau dann wahr, wenn Thalia eine weise Muse ist und alles, was eine Muse und weise ist, Thalia ist.

Eine bestimmte Anzahl von etwas

(7) Es gibt höchstens einen Gott. $\forall x(Px \rightarrow \forall y(Py \rightarrow x = y))$

– Lies: „Für alle Dinge x gilt: wenn x ein Gott ist, dann gilt für alle Dinge y, dass, wenn y ein Gott ist, y mit x identisch ist.“ (Dies impliziert nicht, dass es einen Gott gibt.)

– alternative Formalisierung: $\forall x(Px \rightarrow \neg \exists y(Py \wedge \neg(x = y)))$

– Lies: „Für alle Dinge x gilt: wenn x ein Gott ist, dann gibt es kein Ding, das ein Gott und nicht mit x identisch wäre.“

(8) Es gibt genau zwei Götter.

– Es gibt mindestens zwei Götter, und es gibt höchstens zwei Götter.

– Es gibt mindestens zwei Götter: $\exists x \exists y((Px \wedge Py) \wedge \neg(x = y))\ldots$

– … und es gibt höchstens zwei Götter: $\wedge \ldots \forall z(Pz \rightarrow z = x \vee z = y)$

– Lies: „Es gibt ein x und ein y, so dass x und y Götter sind und x und y nicht miteinander identisch sind … und für alle Dinge z gilt: wenn z ein Gott ist, dann ist z mit x oder mit y identisch.“

$$\exists x \exists y(((Px \wedge Py) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z(Pz \rightarrow z = x \vee z = y))$$

Erweiterung des Baumkalküls für eine prädikatenlogische Sprache mit Identitätszeichen

Erweiterung des Baumkalküls

- *Identitätssatz*: Jedes Ding ist mit sich selbst und nur mit sich selbst identisch.
- Unter der Annahme, dass das betrachtete Universum nicht leer ist (dass es also mindestens ein Ding gibt), folgt aus dem Identitätssatz, dass es mindestens ein Ding gibt, das mit sich selbst identisch ist.
- *Identitätsregel*: Wenn D ein Designator ist, dann ist jede Menge von Sätzen, die den Satz „¬D=D“ enthält, inkonsistent.
- Ein Ast eines Baumes ist genau dann ***geschlossen***, wenn eine Formel und ihre Negation auf ihm vorkommen oder wenn, sofern $\mathfrak{I}$ eine Individuenkonstante ist, eine Formel der Form $\neg\, \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ bzw. $\neg(\mathfrak{I} = \mathfrak{I})$ auf ihm vorkommt.
- Wenn ε eine Formel ist, $\mathfrak{I}$ und $\mathcal{H}$ Individuenkonstanten sind, $\mathfrak{I}$ in ε vorkommt und **ε_1 aus ε gewonnen wird, indem ein Vorkommnis oder mehrere Vorkommnisse von $\mathfrak{I}$ in ε durch $\mathcal{H}$ ersetzt werden**, dann kann ein Baum wie folgt erweitert werden:

$$\begin{array}{c} \varepsilon \\ \mathfrak{I} = \mathcal{H} \\ | \\ \varepsilon_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \varepsilon \\ \mathcal{H} = \mathfrak{I} \\ | \\ \varepsilon_1 \end{array}$$

Anwendungsbeispiele

(1) Wenn Hänsel mit Hans identisch ist und Hans mit Johannes identisch ist, dann ist Hänsel mit Johannes identisch.

$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

1. $\neg(a = b \wedge b = c \rightarrow a = c)$
2. $a = b \wedge b = c$
3. $\neg(a = c)$
4. $a = b$
5. $b = c$
6. $a = c$

$\times$

(„b“ darf wegen 5. in 4. durch „c“ ersetzt werden)

Anwendungsbeispiele

(2) $\vdash \forall x \forall y (x = y \wedge Px \rightarrow Py)$

1.	$\neg \forall x \forall y (x = y \wedge Px \rightarrow Py)$	
2.	$\neg \forall y (a = y \wedge Pa \rightarrow Py)$	*EB aus 1, Konstante neu!*
3.	$\neg (a = b \wedge Pa \rightarrow Pb)$	*EB aus 2, Konstante neu!*
4.	$a = b \wedge Pa$	*aus 3*
5.	$\neg Pb$	
6.	$a = b$	*aus 4*
7.	Pa	
8.	$\neg Pa$	*„b“ in 5 durch „a“ ersetzt – wg. 6*

X

FIN